УДК 372.851

ОБ ОПЫТЕ ВОВЛЕЧЕНИЯ В ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКУЮ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ КУРСАНТОВ АКАДЕМИИ ФСИН РОССИИ

М. С. Маскина
ФКОУВО «Академия права и управления
Федеральной службы исполнения наказаний России», Рязань,
заместитель начальника кафедры математики
и информационных технологий управления,
кандидат педагогических наук, доцент
e-mail: mariya_maskina@mail.ru

В курсе математики не предусмотрено рассмотрения отдельной темы «Теория диофантовых уравнений», но ее изучение весьма полезно для формирования математической культуры обучаемого [1]. Эти уравнения все чаще появляются в текстах дополнительных вступительных испытаний на технические, физико-математические и экономические специальности вузов [2] и в последней задаче тестов профильного уровня ЕГЭ по математике. Решение диофантовых уравнений имеет и теоретический, и практический интерес. Они встречаются в физике, тесно связаны со многими проблемами теории чисел и теории вероятностей, лежат в основе математической теории алгоритмов, применяются для кодирования графической информации.

Диофантовы уравнения — это алгебраические уравнения с целыми коэффициентами, у которых число переменных больше числа уравнений и требуется найти целые или рациональные решения [3].

История решения диофантовых уравнений позволяет наглядно проследить перипетии развития человеческой мысли. Этой проблемой занимались и выдающиеся математики древности (Пифагор, Диофант), и лучшие умы более близкой к нам эпохи (П. Ферма, Л. Эйлер, Ж.-Л. Лагранж и др.). Одним из наиболее известных разделов теории диофантовых уравнений является Великая теорема Ферма, утверждающая, что не существует отличных от нуля целых чисел x, y и z, для которых имеет место равенство $x^n + y^n = z^n$, где $n > 2$. Более 350 лет ведущими математиками предпринимались попытки доказать эту теорему, в 1907 году за нее была объявлена премия в 100 000 немецких марок. С помощью ЭВМ было установлено, что утверждение Ферма справедливо для $n \leq 125000$, но до конца 1994 года в общем случае теорема оставалась недоказанной. Получить ее полное доказательство, занимающее около 150 страниц текста, удалось лишь в 1995 году с помощью теории эллиптических кривых и теории модулярных параболических форм.

Однако теория диофантовых уравнений, наряду с разделами, связанными с наиболее сложными и утонченными разделами высшей математики, содержит и простые разделы, которые посильны и доступны для студентов, а ряд из них – даже для школьников. Материал этот интересен, но весьма разбросан по разным публикациям и изданиям. Автором была проведена систематизация этого материала, классификация методов решения диофантовых уравнений средствами элементарной математики. В результате выделены следующие основные методы:

– использование свойств и признаков делимости целых чисел;

– использование свойств числовых сравнений (то есть перебор возможных остатков от деления чисел);

– использование свойств простых чисел и Основной теоремы арифметики;

– использование НОД, НОК и алгоритма Евклида;

– использование принципа Дирихле, свойств неравенств и дискретности $\boldsymbol{Z}$;

– использование свойств многочленов с целыми коэффициентами;

– использование свойств уравнений с бесконечным числом корней.

Однако следует отметить, что эта классификация не является строгой, так как одно и то же уравнение можно решить различными методами. Кроме того, при решении задач редко используется только один метод, обычно рассматривается их сочетание [4]. Проиллюстрируем применение метода перебора остатков от деления и метода бесконечного спуска на примере.

Решим в целых числах уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = x^2y^2$.

Методом перебора остатков от деления легко проверяется, что квадрат любого целого числа при делении на 4 дает в остатке только 0 и 1. Пусть правая часть уравнения не делится на 4, тогда x и y числа нечетные, а значит, левая часть уравнения, в зависимости от четности z, имеет остаток 2 или 3 при делении на 4, что противоречит тому, что остаток правой части уравнения при делении на 4 равен 1. Следовательно, правая часть кратна четырем, а тогда и левая часть делится на 4, что возможно только, если числа x, y, z четные.

Пусть $x = 2x_1$, $y = 2y_1$, $z = 2z_1$, тогда $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 4x_1^2y_1^2$. Вновь получаем, что левая часть уравнения делится на 4 и потому $x_1 = 2x_2$, $y_1 = 2y_2$, $z_1 = 2z_2$. Тогда $x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 16x_2^2y_2^2$. Далее получим последовательности целых чисел $x_k = \frac{x}{2^k}$, $y_k = \frac{y}{2^k}$, $z_k = \frac{z}{2^k}$. Так как ни одно ненулевое число не может делиться на произвольную степень 2, то $x = y = z = 0$ [5].

Нетрудно видеть, что эти рассуждения базируются на школьных знаниях, их решение доступно для всех, кто проявит усидчивость, аккуратность и трудолюбие. Однако не стоит думать, что все диофантовы уравнения решаются исключительно средствами элементарной математики.

Рассмотрим применение методов различных разделов математики для описания свойств решений одного из первых и простейших диофантовых уравнений вида $x^2 + y^2 = z^2$.

Целые положительные решения этого уравнения определяют длины катетов x, y и гипотенузы z прямоугольных треугольников с целочисленными сторонами и называются пифагоровыми тройками. Приведем несколько приемов нахождения частных случаев пифагоровых троек [6].

1. Взять нечетное число, возвести в квадрат и результат представить в виде суммы двух последовательных чисел: слагаемые будут вторым и третьим членами тройки (например, 13:$13^2 = 169 = 84+85$; отсюда $13^2 + 84^2 = 85^2$).

2. Взять число, кратное 4, его квадрат разделить на 2 и результат представить как сумму двух последовательных нечетных чисел; слагаемые будут вторым и третьим членами тройки (например, 16:$16^2 = 256 = 2(63+65)$; отсюда $16^2 + 63^2 = 65^2$).

3. Взять комплексное число вида $a+bi$, где a и b – произвольные различные целые числа, не равные нулю, возвести его в квадрат, результат представить в виде $x + yi$, где $|x|$ и $|y|$ будут первым и вторым членами тройки (например, $5+3i$: $(5+3i)^2 = 16+30i$; отсюда $16^2+30^2 = 34^2$).

Существуют и другие приемы нахождения пифагоровых троек, иллюстрирующие следующие их свойства [7].

1. Существует пифагоров треугольник с катетом, равным наперед заданному натуральному числу n, при $n \geq 3$:

а) $\left(n; \dfrac{n^2-1}{2}; \dfrac{n^2+1}{2}\right)$ для нечетного n,

б) $\left(n; \dfrac{n^2}{4}-1; \dfrac{n^2}{4}+1\right)$ для четного n.

2. Существуют пифагоровы треугольники с равными гипотенузами (например, (13; 84; 85) и (36; 77; 85)).

3. $(15+39k; 20+52k; 25+65k)$, $(10+25k; 24+60k; 26+65k)$ — пифагоровы треугольники, гипотенузы которых являются последовательными числами.

4. Радиус окружности r, вписанной в пифагоров треугольник (a; b; c), вычисляется по формуле $2r = a + b - c$, $r = n(m-n)$.

5. $(4t^2-1; 4t; 4t^2+1)$ — пифагоров треугольник, описанный около окружности с нечетным радиусом $r = 2t-1$.

6. $\left(k^2-4;\,(2k)^2;\,k^4+4\right)$, где $k=2t+1$ — пифагоров треугольник, описанный около окружности с четным радиусом $r=2\left(k^2-2\right)$.

7. $(3k;\,4k;\,5k)$, $k\in N$ — все пифагоровы треугольники, стороны которых образуют арифметическую прогрессию.

8. $\left(2n+1;\,2n^2+2n;\,2n^2+2n+1\right)$, $(n\geq 1)$ — пифагоровы треугольники, катет и гипотенуза которых являются последовательными числами.

9. Для любого числа k, $k\geq 2$ существует 2^{k-1} пифагоровых треугольников с одним равным катетом, каноническое разложение которого содержит k множителей.

В настоящее время при решении диофантовых уравнений широко применяются средства аналитической геометрии, используются компьютерные технологии, но, несмотря на это, в данном разделе существует значительное количество еще не решенных проблем.

Автором разработана и подготовлена к печати монография, посвященная изучению диофантовых уравнений [8]. Ее создание было направлено на систематизацию накопленного по данной теме именно такого сравнительно простого материала, классификацию методов решения диофантовых уравнений и адаптацию их для студентов и старшеклассников, что и отразилось на структуре данной работы. Она состоит из двух частей: первая часть предназначена для студентов физико-математических, экономических и технических специальностей, а вторая — для школьников старших классов, абитуриентов, стремящихся научиться решать последнюю задачу профильного уровня ЕГЭ по математике, учителей математики и всех интересующихся этой наукой.

Решение диофантовых уравнений на факультативных занятиях обогатит представления студентов о большом разнообразии математических рассуждений, позволит хотя бы частично перенести акцент с пассивного, репродуктивного усвоения знаний на активное, продуктивное обучение. Кроме того, этот материал позволяет организовать исследовательскую деятельность обучающихся на базе относительно элементарных средств [9].

Список основных источников

1. Маскина, М. С. О роли математики в формировании компетенций, связанных с познанием и креативностью / М. С. Маскина // Стандарты и мониторинг в образовании. – 2017. – Т. 5. – № 4. – С. 47–49. Вернуться к статье

2. Маскина, М. С. Подготовка абитуриентов к дополнительным вступительным испытаниям по математике при поступлении в Академию ФСИН России / М. С. Маскина, М. И. Купцов. – Рязань : Акад. ФСИН России, 2014. – 42 с. Вернуться к статье

3. Маскина, М. С. Математика / М. С. Маскина, М. И. Купцов. – Рязань : Акад. ФСИН России, 2018. – 347 с. Вернуться к статье

4. Маскина, М. С. О решении уравнений в целых числах при подготовке к сдаче профильного уровня ЕГЭ по математике / М. С. Маскина, С. В. Давыдочкина // Профильная школа. – 2018. – Т. 6. – № 4. – С. 41–49. Вернуться к статье

5. Хамов, Г. Г. Элементы теории чисел и общей алгебры в математическом классе : учеб.-метод. пособие / Г. Г. Хамов. – Мурманск : МГПИ, 1995. – 119 с. Вернуться к статье

6. Клейн, Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей : в 2 т. / Ф. Клейн ; пер. с нем. ; под ред. В. Г. Болтянского. – М. : Наука, 1987. – Т. 1 : Арифметика. Алгебра. Анализ. – 432 с. Вернуться к статье

7. Гельфонд, А. О. Решение уравнений в целых числах / А. О. Гельфонд. – М. : Наука, 1983. – 61 с. Вернуться к статье

8. Маскина, М. С. Диофантовы уравнения : монография / М. С. Маскина, С. А. Моисеев. – Рязань : Акад. ФСИН России, 2019. – 240 с. Вернуться к статье

9. Купцов, М. И. Применение метода проектов при преподавании математических дисциплин для экономических специальностей / М. И. Купцов, М. С. Маскина // Научные исследования и разработки. Социально-гуманитарные исследования и технологии. – 2017. – Т. 6. – № 1. – С. 77–81. Вернуться к статье